

Reverzní Fibonacciho posloupnost a její význam

Jakub Souček¹, Ondrej Janičko²

¹ Plzeň, Česká republika, mcsacek87@gmail.com

² Bratislava, Slovenská republika, floch@azet.sk, <http://www.reversefibonacci.com>

19. 1. 2019

Abstrakt: V předloženém článku je popsán návrh nové posloupnosti s názvem „Reverzní Fibonacciho posloupnost“. Úvod studie se zabývá odvozením limity poměru dvou následujících čísel navržené posloupnosti, která je rovna číslu j . Dále jsou popsány jednotlivé vlastnosti tohoto čísla. Další část článku je věnována geometrickému významu získaného čísla j . S pomocí závěrů geometrické interpretace jsou odvozeny jednotlivé vztahy čísla j k číslu π , zlatému řezu ϕ , Eulerovu číslu e a Theodorově spirále. Závěr článku se zabývá vztahem navržené posloupnosti k Fibonacciho posloupnosti. Navržená posloupnost se vyznačuje stejnými vlastnostmi jako Fibonacciho posloupnost pro jednotlivé hodnoty ciferačních členů její posloupnosti. Hodnoty ciferačních navržené posloupnosti jsou k hodnotám ciferačních Fibonacciho posloupnosti reverzní.

Klíčová slova: Reverzní Fibonacciho posloupnost, Fibonacciho posloupnost, Lucasova sekvence, ciferační, číslo π , Eulerovo číslo e , zlatý řez ϕ , Theodorova spirála, Vesica piscis

1. Úvod

Fibonacciho posloupnost a zlatý řez jsou všeobecně známé matematické poznatky, jejichž význam je postupně odhalován. Uplatnění zlatého řezu a Fibonacciho posloupnosti lze v přírodě spatřit téměř všude, od vzorce uspořádání semen slunečnice až po proporce loděnk. Tento poměr se dokonce uplatnil v architektuře, umění a hudbě, což dokazuje, že lidé jsou zlatým řezem podvědomě fascinováni. [1]

V předloženém článku bude popsána posloupnost, která má právě s Fibonacciho posloupností mnoho společného, kde tyto závěry budou popsány v následujících kapitolách. Z navržené posloupnosti budou následně vyvozeny další matematické a geometrické významy.

2. Reverzní Fibonacciho posloupnost

Jak bylo popsáno výše, byla navržena posloupnost v následujícím tvaru, viz rovnice (1). Z níže uvedeného vzorce je patrné, že členy posloupnosti jsou pouze kladná čísla, tj. členy navržené posloupnosti jsou z oboru přirozených čísel N , kde ciferační jednotlivý členů je právě reverzní k členům Fibonacciho posloupnosti. Je zřejmé, že lze zapsat i jiné řady s podobnými vzory, ale tyto řady nebudou mít unikátní vlastnosti jako popisovaná navržená reverzní Fibonacciho posloupnost. Tyto vlastnosti budou dále popsány v následujících kapitolách.

Navržená posloupnost je velice podobná posloupnosti [A057084](#), dle OEIS¹ [2], s rozdílem nultého členu. Posloupnost [A057084](#) má pro člen $n=0$ hodnotu 1 , přičemž navržená posloupnost má pro člen $n=0$ hodnotu 0 . Tento fakt je velice důležitý z hlediska periodicity a vztahu k Fibonacciho posloupnosti a bude popsán v následujících kapitolách.

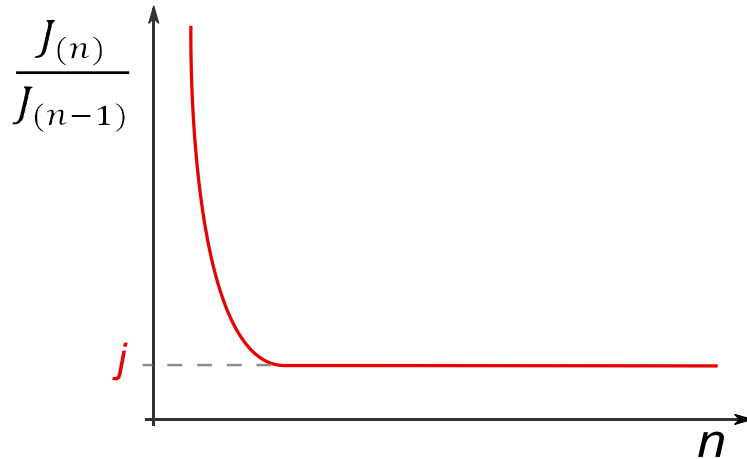
¹ On-Line Encyclopedia of Integer Sequences je databáze celočíselných posloupností volně dostupná na webu. Obsahuje přes 300 000 posloupností (k březnu 2018), ve kterých lze vyhledávat jak pomocí klíčových slov, tak uvedením části hledané posloupnosti. O každé posloupnosti je uchováno množství informací včetně odkazů na další literaturu a webové stránky týkající se dané posloupnosti.

$$J(n) = \begin{cases} 0, & \text{pro } n = 0; \\ 1, & \text{pro } n = 1; \\ 8 \cdot (J(n-1) - J(n-2)) & n > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Pro zjednodušení výpočtů, lze tuto posloupnost zapsat tvarem následujícím, viz rovnice (2).

$$J_{(n+2)} = 8 \cdot (J_{(n+1)} - J_n) \quad (2)$$

Z rozboru vztahu (1) nebo (2) je patrné, že limita dvou následujících čísel navržené posloupnosti je rovna číslu j , viz **obrázek 1**.



Obrázek 1. Grafické vyjádření poměru j

Poměr j lze následně zapsat níže uvedeným vztahem, viz rovnice (3) a dosadit do původního vztahu pro navrženou posloupnost (2).

$$\frac{J_{(n+2)}}{J_{(n+1)}} = j; J_{(n+2)} = j \cdot J_{(n+1)}; \frac{J_{(n+1)}}{J_n} = j; J_n = \frac{J_{(n+1)}}{j}. \quad (3)$$

Řešením vzniklé rovnice (4) je získán kvadratický vztah (5).

$$\begin{aligned} j \cdot J_{(n+1)} &= 8 \cdot \left(J_{(n+1)} - \frac{J_{(n+1)}}{j} \right) = 8 \cdot \left(\frac{j \cdot J_{(n+1)}}{j} - \frac{J_{(n+1)}}{j} \right) = 8 \cdot \left(\frac{J_{(n+1)} \cdot (j-1)}{j} \right) \\ j \cdot J_{(n+1)} &= 8 \cdot \left(\frac{j \cdot J_{(n+1)}}{j} - \frac{J_{(n+1)}}{j} \right) \\ j \cdot J_{(n+1)} &= 8 \cdot \left(\frac{J_{(n+1)} \cdot (j-1)}{j} \right) \\ \frac{j \cdot J_{(n+1)}}{8} \cdot \frac{j}{J_{(n+1)}} &= (j-1) \\ \frac{j^2}{8} &= (j-1) \end{aligned} \quad (4)$$

$$j^2 - 8j + 8 = 0 \quad (5)$$

Výpočtem kořenů kvadratické rovnice (5) jsou získány poměry j_1 a j_2 ve tvaru, viz rovnice (6).

$$\begin{aligned}
 j_{1,2} &= \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2}, \\
 j_1 &\approx 6,82842712 \dots \\
 j_2 &\approx 1,171572875 \dots \\
 \frac{1}{j_1} &\approx 0,146446609 \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

Kořeny kvadratické rovnice lze vyjádřit například pomocí rovnic (7), (8), (9), (10), (11) a (12).

$$j_1 + j_2 = 8 \tag{7}$$

$$j_1 \cdot j_2 = 8 \tag{8}$$

$$j_1 \cdot j_2 = j_1 + j_2 \tag{9}$$

$$\frac{j_1}{j_2} = j_1 - 1 \tag{10}$$

$$\frac{j_1^2}{8} = j_1 - 1 \tag{11}$$

$$\frac{j_2^2}{8} = j_2 - 1 \tag{12}$$

Z výše uvedených vztahů je zřejmé, že **součinem** nebo **součtem** jednotlivých kořenů poměru j je vždy získáno **číslo 8**, viz rovnice (7) a (8). Tuto závislost lze dát do vzájemné rovnosti, viz vztah (9). Dále je patrné, že **podíl** těchto kořenů je roven hodnotě **rozdílu čitatele a čísla 1**, viz rovnice (10). A v neposlední řadě, že **osmina plochy čtverce** o délce j je rovna **vzdálenosti této délky s rozdílem čísla 1**, viz (11) a (12).

Pro upřesnění, lze zapsat navrženou posloupnost pomocí řešení rekurentní rovnice ve tvaru (13).

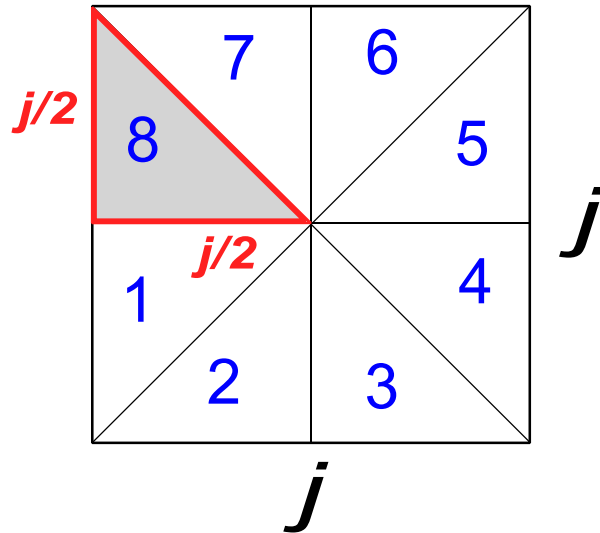
$$J(n) = \frac{(4 + 2\sqrt{2})^n - (4 - 2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}} = \frac{j_1^n - j_2^n}{4\sqrt{2}} \tag{13}$$

Z podrobnějšího zkoumání navržené posloupnosti a vlastností jejich kořenů plyne, že navržená posloupnost je jedna z Lucasových sekvencí $U_n(P, Q)$, kde $P=Q=8$. Takovou posloupnost lze zapsat ve tvaru $U_n(8, 8)$, podobně jako Fibonacciho posloupnost ve tvaru $U_n(1, -1)$. [3]

3. Geometrický význam

Z důvodu snazšího znázornění a pro zjednodušení je pro další úvahy brán v potaz pouze kořen j_1 . Geometrický význam navržené posloupnosti vychází ze vztahu (11), jak bylo popsáno výše.

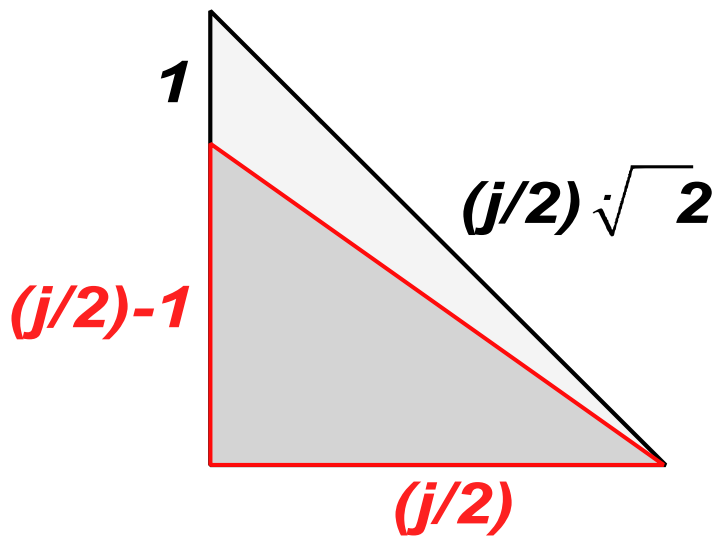
Levou stranu rovnice (11) lze graficky vyjádřit **obrázkem 2**.



Obrázek 2. Geometrické vyjádření levé strany rovnice (11)

Obrázek 2 popisuje rovnoramenný trojúhelník o straně $j/2$, kde plocha tohoto trojúhelníku je právě rovna levé straně rovnice (11).

Pravá strana rovnice (11) je znázorněna pomocí **obrázku 3**.



Obrázek 3. Geometrické vyjádření pravé strany rovnice (11)

Na **obrázku 3** je znázorněna délka $(j-1)$. Vyjádřením této délky je sestaven pravoúhlý trojúhelník o délkách odvěsny $j/2$ a $(j/2)-1$. Na **obrázku 3** je zmíněný trojúhelník znázorněn **červenou** barvou.

Obsah původního trojúhelníku S_1 o délce odvěsny $j/2$ je popsán rovnicí (14) a obsah nově vzniklého trojúhelníku S_2 (na **obrázku 3** vykreslen **červenou** barvou) popsán rovnicí (15).

$$S_1 = \frac{j^2}{8} \quad (14)$$

$$S_2 = \left(\frac{j}{2} - 1\right) \cdot \frac{j}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{j^2}{8} - \frac{j}{4} = \frac{j \cdot (j-2)}{8} \quad (15)$$

Pokud jsou plochy (14) a (15) dány do vzájemného podílu je získán následující vztah, viz rovnice (16).

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{j^2}{8} \cdot \frac{8}{j \cdot (j-2)} = \frac{j}{j-2} \quad (16)$$

Dosazením kořene kvadratické rovnice j_1 do rovnice (16) je získán vztah (17) ve tvaru:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{j_1}{j_1-2} = \sqrt{2}. \quad (17)$$

Poměrem těchto ploch při dosazení kořene j_1 je získána číselná hodnota $\sqrt{2}$. Obdobným řešením, s rozdílem trojúhelníků o délce j , je následně získán vztah (18).

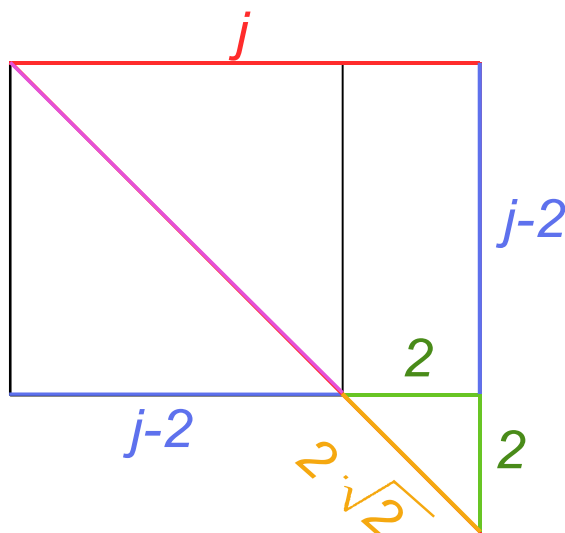
$$\frac{S_{12}}{S_{22}} = \frac{j}{j-1}. \quad (18)$$

Dosazením kořene kvadratické rovnice j_1 do rovnice (18) je získán vztah (19) v následujícím tvaru:

$$\frac{S_{12}}{S_{22}} = \frac{j_1}{j_1-1} = j_2. \quad (19)$$

Rovnice (18) tedy popisuje, že poměr ploch výše uvedených trojúhelníků při dosazení kořene j_1 je právě roven kořeni kvadratické rovnice j_2 .

Geometrické znázornění rovnice (17) popisuje **obrázek 4**.



Obrázek 4. Geometrické vyjádření rovnice (17)

Obrázek 4 popisuje fakt, že pokud je vykreslen obdélník o stranách j a $(j-2)$, pak poměr jeho jednotlivých délek, při dosazení kořene kvadratické rovnice j_1 , je roven hodnotě $\sqrt{2}$ nebo $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

K tomuto závěru lze dospět i jiným způsobem, jak je vyobrazeno na **obrázku 4**. Opět se jedná o poměr jednotlivých ploch, ale v tomto případě jde o poměr ploch obdélníku o stranách j , $(j-2)$ a rovnoramenného trojúhelníku o délce odvěsny j .

Obsah obdélníku o stranách j a $(j-2)$ je znázorněn rovnicí (20), a obsah rovnoramenného trojúhelníku o délce odvěsny j rovnicí (21).

$$S_3 = j \cdot (j - 2) \quad (20)$$

$$S_4 = \frac{j^2}{2} \quad (21)$$

Poměr ploch S_3 a S_4 je dán následujícím vztahem, viz rovnice (22).

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{2j \cdot (j - 2)}{j^2} = \frac{2 \cdot (j - 2)}{j} \quad (22)$$

Opětovným dosazením kořene kvadratické rovnice j_1 do rovnice (22) je získán vztah (23).

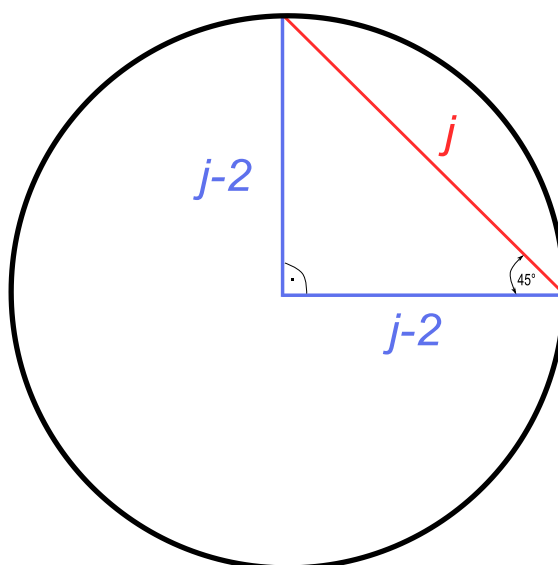
$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{2 \cdot (j_1 - 2)}{j_1} = \sqrt{2} \quad (23)$$

Je tedy zřejmé, že podíl ploch S_3 a S_4 je opět roven hodnotě $\sqrt{2}$. Z tohoto důvodu lze následně dát rovnice (17) a (23) do vzájemné rovnosti. Tato rovnost je popsána vztahem (24).

$$\frac{j}{j - 2} = \frac{2 \cdot (j - 2)}{j} \quad (24)$$

3.1 Vztah poměru j k číslu π

Pomocí rovnice (17) lze sestavit pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník o délkách odvěsny $(j-2)$ a délce přepony j . Grafické znázornění tohoto trojúhelníku popisuje **obrázek 5**.



Obrázek 5. Vztah poměru j k číslu π

Jak bylo uvedeno výše, dosazením kořene kvadratické rovnice j_1 do rovnice (16) je získán vztah, jehož hodnota je rovna číslu $\sqrt{2}$. Převrácená hodnota tohoto vztahu je následně rovna hodnotě $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Díky rovnoramennému trojúhelníku je patrné, že úhel svíraný mezi odvěsnou a přeponou musí být vždy 45° , vyjádřeno v obloukové míře jako $\frac{\pi}{4}$.

Za pomoci rovnice (17) lze následně zapsat goniometrickou funkci následujícím způsobem, viz rovnice (25).

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{j-2}{j} \quad (25)$$

Řešením vztahu (25) je získán vztah mezi poměrem j a číslem π , viz vztah (26).

$$\pi = 4 \cdot \arcsin\left(\frac{j-2}{j}\right) \quad (26)$$

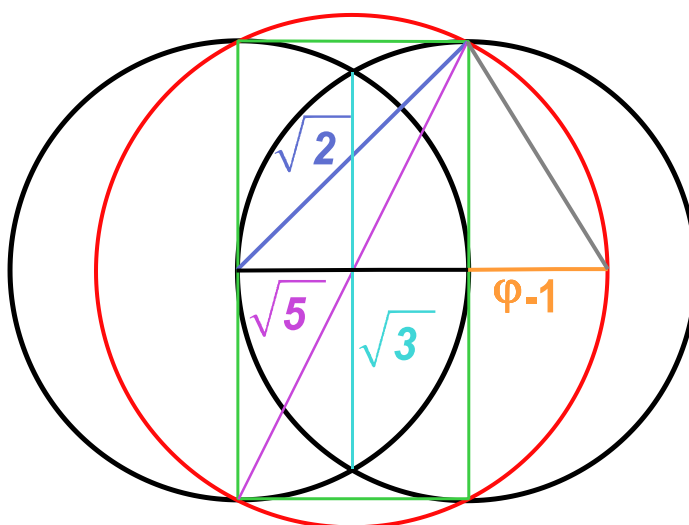
Obvod kružnice z **obrázku 5** lze následně vyjádřit jen za pomoci kořene kvadratické rovnice j_1 v následujícím tvaru (27). Podobně lze vyjádřit i plochu tohoto kruhu, viz (28).

$$O_{jk} = 8(j-2) \cdot \arcsin\left(\frac{j-2}{j}\right) \quad (27)$$

$$S_{jk} = 4 \cdot \arcsin\left(\frac{j-2}{j}\right) \cdot (j-2)^2 \quad (28)$$

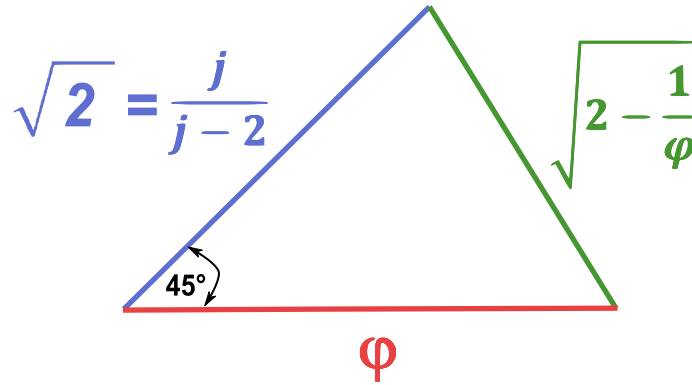
3.2 Vztah poměru j k zlatému řezu φ

Vztah poměru j k zlatému řezu φ vychází ze základního útvaru posvátné geometrie "Vesica piscis". Tento obrazec se dá volně přeložit jako "rybí duše" a jde o dvojici protínajících se kružnic se středy na svých obvodech. Centrála má tedy délku poloměru jedné z nich, viz **obrázek 6**. [4]



Obrázek 6. Vesica piscis

Poměr j lze vyjádřit za pomoci vzniklého obecného trojúhelníku, který je zobrazen na **obrázku 7**. Strana a nově vzniklého trojúhelníku (na **obrázku 7** vyznačena **zelenou** barvou) je vypočtena s využitím Pythagorovy věty a jednoduchých matematických úprav.



Obrázek 7. Vztah poměru j k zlatému řezu φ

Pokud jsou známy všechny strany obecného trojúhelníku a úhel $\alpha = \frac{\pi}{4}$, lze za pomoci **kosinové věty** vyjádřit poměr j , viz odvození (29).

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 2 - \frac{1}{\varphi} &= 2 + \varphi^2 - 2\sqrt{2} \cdot \varphi \cdot \left(\frac{j-2}{j}\right) \\
 \frac{\frac{1}{\varphi} + \varphi^2}{2\sqrt{2} \cdot \varphi} - 1 &= -\frac{2}{j} \\
 j &= \frac{4\sqrt{2} \cdot \varphi}{2\sqrt{2} \cdot \varphi - \frac{1}{\varphi} - \varphi^2}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Výsledný vztah (29) lze dále pomocí jednoduchých matematických operací zapsat následujícím způsobem, viz rovnice (30).

$$j = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \varphi^2 + \varphi - 1} \tag{30}$$

Závěrem výpočtem inverzní funkce rovnice (30) lze vyjádřit vztah zlatého řezu φ a poměru j , viz vztah (31).

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8j\sqrt{2} - 3j - 16\sqrt{2}}}{2\sqrt{j}} \tag{31}$$

3.3 Vztah poměru j k Eulerovu číslu e

Vztah poměru j k Eulerovu číslu e vychází z Eulerova vzorce. Tento vzorec určuje vztah mezi goniometrickými funkcemi a exponenciální funkcí. Na tento vzorec lze nahlížet jako na větu komplexní analýzy, viz rovnice (32). [5]

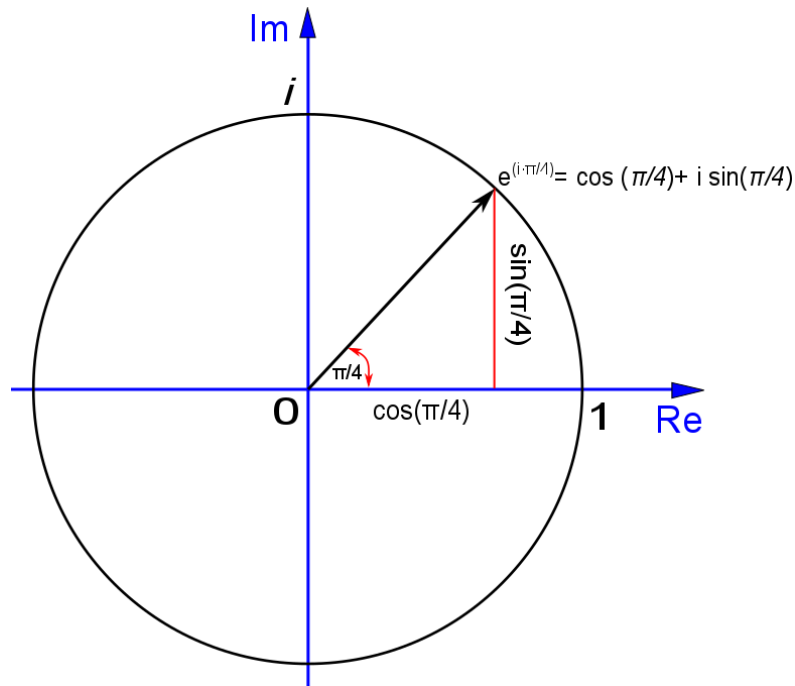
$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \quad (32)$$

Jak bylo uvedeno výše, dosazením kořene kvadratické rovnice j_1 do rovnice (16) je získán vztah, jehož hodnota je rovna číslu $\sqrt{2}$. Převrácená hodnota tohoto vztahu je následně rovna hodnotě $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

S pomocí rovnice (17) lze následně zapsat goniometrické rovnice následujícím způsobem, viz rovnice (33) a **obrázek 8**.

$$e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)} = \frac{j-2}{j} + i \cdot \left(\frac{j-2}{j}\right) \quad (33)$$



Obrázek 8. Vztah poměru j k Eulerovu číslu e

Výsledný vztah poměru j k Eulerovu číslu e a jeho odvození z rovnice (33) popisuje následující rovnice, viz (34).

$$e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)} = \left(\frac{j-2}{j}\right) \cdot (1+i)$$

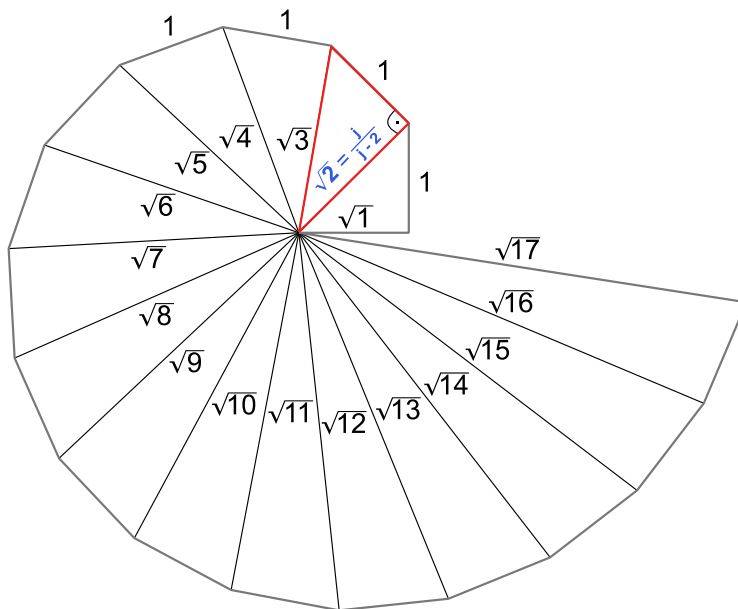
$$\frac{e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}}{(1+i)} = \left(1 - \frac{2}{j}\right)$$

$$\frac{j}{2} = \frac{(1+i)}{1+i - e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}} \quad (34)$$

$$j = \frac{2 \cdot (1+i)}{(1+i) - e^{\left(\frac{i\pi}{4}\right)}}$$

3.4 Vztah poměru j k Theodorově spirále

Konstrukci Theodorovy spirály vytvořil řecký matematik **Theódoros z Kyrény**. Spirála je tvořena posloupností pravoúhlých trojúhelníků, kde první z trojúhelníků je rovnoramenný pravoúhlý, jehož odvěsny mají velikost 1 . Přepona takto vniklého trojúhelníku je odvěsnou trojúhelníku dalšího, kde druhá odvěsna je rovna opět hodnotě 1 . Grafické znázornění této spirály je zobrazeno na **obrázku 9**. [6]



Obrázek 9. Grafické znázornění Theodorovy spirály

Vztah poměru j k Theodorově spirále vychází z **červeně** vyznačeného trojúhelníku zobrazeného na **obrázku 9**. Stejně jako v předchozích případech, lze vyjádřit hodnotu $\sqrt{2}$ s pomocí rovnice (17). Řešením jednoduché rovnice lze následně zapsat jakoukoliv odmocninu přirozeného čísla s pomocí poměru j . Tento vztah popisuje rovnice (35).

$$\sqrt{n} = \sqrt{\frac{j^2}{(j-2)^2} + (n-2)}, n \in N \quad (35)$$

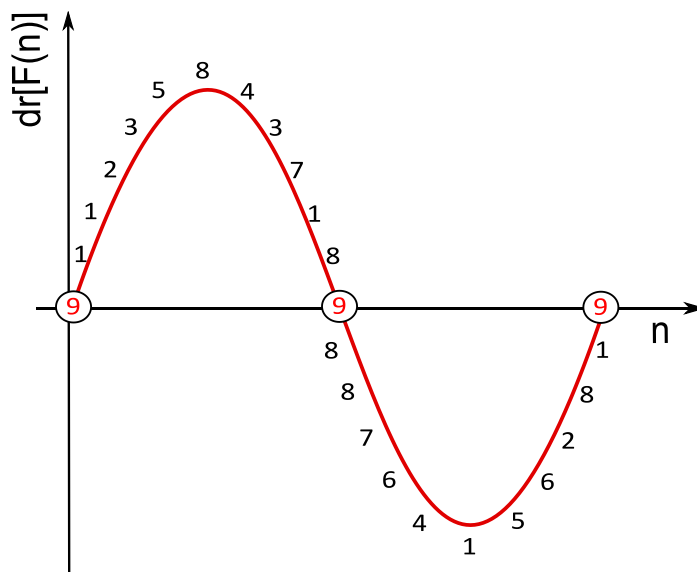
4. Vztah navržené posloupnosti s Fibonacciho posloupností

Už v úvodu článku byla zmíněna Fibonacciho posloupnost a její vztah k navržené reverzní posloupnosti. Ve Fibonacciho posloupnosti je ukrytý opakující se vzor s periodou $n=24$. Tento vzor je získán ciferací² (v aj. označováno jako "digital root") jednotlivých členů posloupnosti, kde ciferaci lze zapsat s pomocí kongruentního vztahu (36). [7]

$$dr(n) = 1 + [(n-1) \bmod 9] \quad (36)$$

² Ciferace je pojem z oblasti aritmetiky označující zobrazení, které každému přirozenému číslu přiřazuje jednociferné číslo vzniklé opakováním ciferného sčítání původního čísla. Pokud je výsledek jednociferný, jedná se o ciferaci původního čísla. V opačném případě se opakuje sčítání cifer výsledku, dokud není získáno jednociferné číslo.

Tato perioda lze dále rozdělit na **půl periodu** o velikosti $n=12$, kde ciferací součtu členů Fibonacciho posloupnosti $dr[F(n) + F_{(n+12)}]$ je vždy získán výsledek 9. Rozložení ciferací jednotlivých členů Fibonacciho posloupnosti je vyobrazeno na **obrázku 10**.

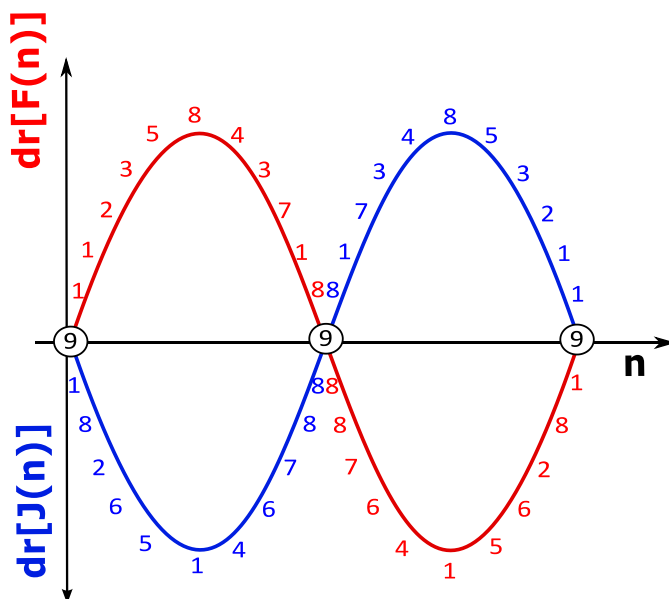


Obrázek 10. Rozložení ciferací jednotlivých členů Fibonacciho posloupnosti

Proč je tedy navržená posloupnost nazvána reverzní Fibonacciho posloupností? Navržená posloupnost se vyznačuje stejnými vlastnostmi jako Fibonacciho posloupnost pro jednotlivé hodnoty ciferací členů její posloupnosti, kde hodnoty ciferací navržené posloupnosti jsou k hodnotám ciferací Fibonacciho posloupnosti reciproké (*reverzní*). Zmíněnou reciprocitu pak lze zapsat následujícím vztahem (37). Z tohoto hlediska vyplývá, že stejně jako u Fibonacciho posloupnosti lze ciferací součtu členů navržené posloupnosti $dr[J(n) + J_{(n+12)}]$ vždy získat číslo 9.

$$dr[F(n)] = dr[J(24 - n)], \text{ pro } n \leq 24 \quad (37)$$

Vzájemnou reverzibilitu navržené posloupnosti a Fibonacciho posloupnosti zobrazuje **obrázek 11**.



Obrázek 11. Rozložení ciferací jednotlivých členů Fibonacciho posloupnosti

Pro lepší představu výše uvedeného je zobrazena **tabulka 1**, ve které jsou vyčísleny jednotlivé hodnoty členů jak navržené, tak Fibonacciho posloupnosti a jejich ciferačí.

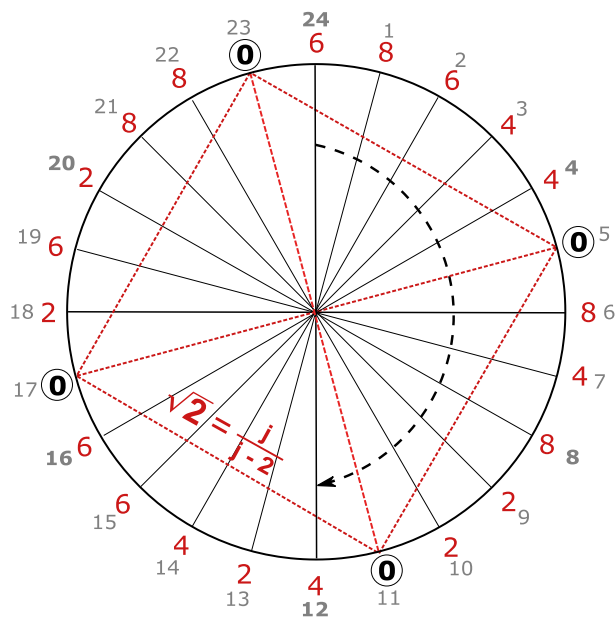
Z **tabulky 1** vyplývá další vlastnost ve vztahu k Fibonacciho posloupnosti. Pro členy navržené reverzní posloupnosti $J(19)$ až $J(2)$ jsou první digit³ (v tabulce vyznačeny **modrou** barvou) shodné se sekvencí prvních šesti čísel Fibonacciho posloupnosti $F(1)$ až $F(6)$. Zmíněné opakování této sekvence po 6 číslech je s četností 3.

Tabulka 1. Vyčíslení jednotlivých hodnot členů posloupností a jejich ciferačí

n	$J(n)$	$dr[J(n)]$	$(24-n)$	$F(24-n)$	$dr[F(24-n)]$
0	0	9	24	46368	9
1	1	1	23	28657	1
2	8	8	22	17711	8
3	56	2	21	10946	2
4	384	6	20	6765	6
5	2624	5	19	4181	5
6	17920	1	18	2584	1
7	122368	4	17	1597	4
8	835584	6	16	987	6
9	5705728	7	15	610	7
10	38961152	8	14	377	8
11	266043392	8	13	233	8
12	1816657920	9	12	144	9
13	12404916224	8	11	89	8
14	84706066432	1	10	55	1
15	578409201664	7	9	34	7
16	3949625081856	3	8	21	3
17	26969727041536	4	7	13	4
18	184160815677440	8	6	8	8
19	1257528709087232	5	5	5	5
20	8586943147278336	3	4	3	3
21	58635315505528832	2	3	2	2
22	400386978866003968	1	2	1	1
23	2734013306883801088	1	1	1	1
24	18669010624142376960	9	0	0	9

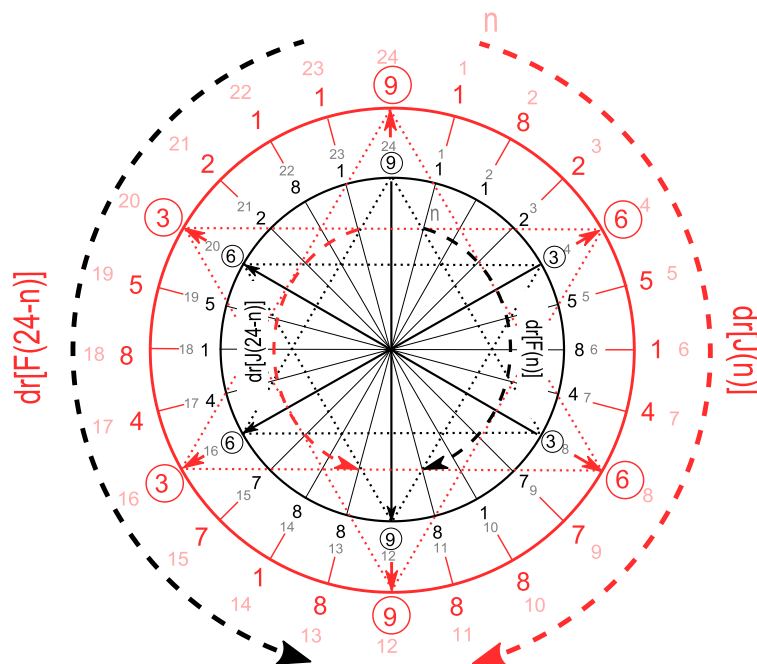
Další zajímavou vlastností je periodicitu **digitů na pozici jednotek** (posledních čísel) pro členy navržené posloupnosti od členu $J(2)$ s periodou $n=24$. Zmíněná periodicitu je zobrazena na **obrázku 12**. Z níže uvedeného obrázku je patrné, že pokud je sestaven čtverec s vrcholy jednotkových digitů rovným 0, tak strana tohoto čtverce je právě rovna hodnotě $\sqrt{2}$ za předpokladu jednotkové kružnice, kde hodnotu $\sqrt{2}$ lze zapsat pomocí rovnice (17). Podobnou vlastnost objevil v roce 1774 u Fibonacciho posloupnosti francouzský matematik **Joseph Louis Lagrange**, který zjistil, že digitu na pozici jednotek v členech Fibonacciho posloupnosti se opakují s periodicitou 60 míst. [8]

³ Digit je numerická číslice charakterizována jako jediný symbol (např. "1" nebo "8") použitý samostatně nebo v kombinaci (např. "18"), tak aby reprezentoval čísla dle některých pozičních číselných systémů.



Obrázek 12. Periodicita digitů na pozici jednotek pro navrženou posloupnost

Vztah navržené posloupnosti k Fibonacciho posloupnosti lze vyjádřit i graficky, viz **obrázek 13**.



Obrázek 13. Grafické znázornění vztahu Fibonacciho posloupnosti a navržené reverzní posloupnosti

Na **obrázku 13** jsou znázorněny 2 kruhy, které jsou rozděleny po 24 stejných úsecích. První z kruhů má **černou** barvu a zobrazuje hodnoty ciferací jednotlivých členů *Fibonacciho posloupnosti* ve směru hodinových ručiček. Proti směru hodinových ručiček, pak hodnoty ciferací jednotlivých členů navržené *reverzní Fibonacciho posloupnosti*.

Druhý kruh je znázorněn **červenou** barvou, kde tento kruh je **právě reverzní** ke kruhu prvnímu. Tj. zobrazuje hodnoty ciferací jednotlivých členů navržené *reverzní Fibonacciho posloupnosti* ve směru hodinových ručiček a proti směru hodinových ručiček pak hodnoty ciferací jednotlivých členů *Fibonacciho posloupnosti*.

Pro představu si lze tento vztah představit jako analogové hodiny, kde tikání ve směru hodinových ručiček představuje Fibonacciho posloupnost. V protisměru hodinových ručiček pak navrženou reverzní Fibonacciho posloupnost a naopak.

Na závěr, výše uvedené a další vlastnosti vztahu mezi Fibonacciho posloupností a posloupností navrženou popisují následující rovnice:

$$dr[F(n)] = dr[J(24 - n)]; dr[J(n)] = dr[F(24 - n)], \text{ pro } n \leq 24, \quad (38)$$

$$dr[F(n) + F(n + 12)] = dr[J(n) + J(n + 12)] = 9, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} dr[J(n) + F(12 - n)] &= dr[F(n) + J(12 - n)] = 9, \text{ pro } n \leq 12, \\ dr[J(n) + F(36 - n)] &= dr[F(n) + J(36 - n)] = 9, \text{ pro } 24 \geq n > 12. \end{aligned} \quad (40)$$

5. Závěr

V předloženém článku je definována nová posloupnost a nový poměr tzv. reverzní Fibonacciho posloupnosti a jejich vztahy a vlastnosti k dalším matematickým fundamentálním číslům a strukturám, což ukazuje na zajímavost této posloupnosti a odvozeného poměru. Je dokázáný jednoznačný vztah mezi původní Fibonacciho posloupností a navrhouvanou reverzní Fibonacciho posloupností a jejich poměry. Uplatnění Fibonacciho posloupnosti a zlatého řezu vidíme v přírodě, a proto se můžeme domnívat, že v budoucnosti bude objevené v přírodě uplatnění i pro reverzní Fibonacciho posloupnost. Reverzní Fibonacciho posloupnost je ukryta ve Fibonacciho posloupnosti, a proto se všechny nově odvozené vlastnosti reverzní Fibonacciho posloupnosti dají uplatnit při dalším výzkumu zlatého řezu a samostatně vedeného oboru věnovaného Fibonacciho posloupnosti. Velmi důležitý je také odvozený vztah mezi zlatým řezem a poměrem reverzní Fibonacciho posloupnosti. Další důležitý vztah je mezi poměrem reverzní Fibonacciho posloupnosti a Eulerovým číslem e . Tento článek rozšiřuje naše vědomosti o zlatém řezu a Fibonacciho posloupnosti, proto dává naději na široké uplatnění v různých vědních oborech, umění a přírodě.

Reference

1. VOROBIEV, Nicolai N. *Fibonacci Numbers*. Ilustrované vydání. Basilej: Springer Science & Business Media, 2002. ISBN 978-3764361358.
2. OEIS Foundation Inc. (2018), The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org/A057084>
3. KOVAL, Aleksey. *On Lucas Sequences Computation*. Int. J. Communications, Network and System Sciences., 2010(3), 943-944. DOI: 10.4236/ijcns.2010.312128.
4. FLETCHER, Rachel. Musings on the Vesica Piscis. *Nexus Network Journal* [online]. 2004, 6(2), 95-110. DOI: 10.1007/s00004-004-0021-8. ISSN 1590-5896.
5. MOSKOWITZ, Martin. *A Course on Complex Analysis in One Variable*. 1. New York: World Scientific Pub Co, 2002. ISBN 981024780X.
6. STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis).
7. TROTT, Michael. *The Mathematica GuideBook for Programming*. 1. New York: Springer, 2004. ISBN 978-0387942827.
8. LIVIO, Mario. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books, 2003. ISBN 978-0767908160.